Транспортная задача

Условие:
Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, a_2, \dots a_m$.
Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_1, b_2 \dots b_n$.
Известны c_{ij} , $i=1,2,\dots m$; $j=1,2,\dots n$ — стоимости перевозки единиц груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю.
Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью, и суммарные затраты на перевозку всех грузов являются минимальными.

Исходные данные транспортной задачи записываются в виде таблицы:

Потребители

поставщики

$a_j \backslash b_j$	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Исходные данные задачи могут быть представлены в виде:

- вектора $A=(a_1,a_2,\dots,a_m)$ запасов поставщиков
- вектора $B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ запросов потребителей
- матрицы стоимостей:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots c_{mn} \end{pmatrix}$$

Математическая модель транспортной задачи

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij} , $i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$ — объемы перевозок от i-го поставщика каждому j-му потребителю.
Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots x_{mn} \end{pmatrix}$$

Так как произведение $c_{ij}*x_{ij}$ определяет затраты на перевозку груза от i-го поставщика j-му потребителю, то суммарные затраты на перевозку всех грузов равны:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

По условию задачи требуется обеспечить минимум суммарных затрат.
Следовательно, **целевая функция** задачи имеет вид:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

Система ограничений задачи состоит из двух групп уравнений.
Первая группа из *m* уравнений описывает тот факт, что запасы всех *m* поставщиков вывозятся полностью и имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Вторая группа из *n* уравнений выражает требование удовлетворить запросы всех *n* потребителей полностью и имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Учитывая условие неотрицательности объемов перевозок, математическая модель выглядит следующим образом:

Математическая модель

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \ i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n.$$

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Такая задача называется задачей с **правильным балансом**, а модель задачи **закрытой**. Если же это равенство не выполняется, то задача называется задачей с **неправильным балансом**, а модель задачи — **открытой**.

Математическая формулировка транспортной задачи такова: найти переменные задачи $X=(x_{ij})$, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$, удовлетворяющие системе ограничений, условиям неотрицательности и обеспечивающие минимум целевой функции.

Пример решения транспортной задачи

Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице:

a_i \ b_j	20	30	40
40	3	5	7
50	4	6	10

Решение:

1. **Вводим переменные задачи (матрицу перевозок):**

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}.$$

2. **Записываем матрицу стоимостей:**

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

3. **Целевая функция задачи равняется сумме произведений всех соответствующих элементов матриц С и Х.**

$$Z(X) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23}.$$

Данная функция, определяющая суммарные затраты на все перевозки, должна достигать минимального значения.

4. **Составим систему ограничений задачи.**

Сумма всех перевозок, стоящих в первой строке матрицы Х, должна равняться запасам первого поставщика, а сумма перевозок во второй строке матрицы Х равняться запасам второго поставщика:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50.$$

Это означает, что запасы поставщиков вывозятся полностью.

Суммы перевозок, стоящих в каждом столбце матрицы Х, должны быть равны запросам соответствующих потребителей:

$$x_{11} + x_{21} = 20,$$

$$x_{12} + x_{22} = 30,$$

$$x_{13} + x_{23} = 40.$$

Это означает, что запросы потребителей удовлетворяются полностью.

Необходимо также учитывать, что перевозки не могут быть отрицательными:

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ответ: Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи записывается следующим образом:

Найти переменные задачи, обеспечивающие минимум целевой функции и удовлетворяющие системе ограничений и условиям неотрицательности.

$$Z(X) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\ x_{11} + x_{21} = 20, \\ x_{12} + x_{22} = 30, \\ x_{13} + x_{23} = 40 \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$